

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ CLUJ - 20.02.2026**

**Barem clasa a VIII-a**

**Din oficiu.....10p**

**Subiectul 1. (25 puncte)**

Fie trei numere reale, pozitive și nenule  $x, y$  și  $z$ .

a) Demonstrați că  $(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$ .

b) Dacă  $x + y + z = 1$ , demonstrați că  $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} \geq \frac{3}{2}$ .

**Soluție:**

a)  $(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$  .....5p

Folosind faptul că  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$  .....5p

avem  $(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$  .....5p

b) Cum  $x + y + z = 1 \Rightarrow \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} = \frac{x}{x+y+z-x} + \frac{y}{x+y+z-y} + \frac{z}{x+y+z-z}$

vom demonstra că  $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$  .....2p

sau  $\frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{x+z} + 1 + \frac{z}{x+y} + 1 \geq \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{x+z} + \frac{x+y+z}{x+y} \geq \frac{9}{2}$  .....2p

Scoatem factorul comun  $(x + y + z)$  și avem  $(x + y + z) \left( \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} \right) \geq \frac{9}{2}$  .....2p

Notăm:  $a = y + z$ ,  $b = x + z$ ,  $c = x + y$  și avem  $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$ .

Inegalitatea se rescrie  $\frac{a+b+c}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{9}{2}$  .....2p

Folosind relația demonstrată la punctul b), avem  $(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$  și, împărțind la 2,

obținem concluzia.....2p

**Subiectul 2. (25 puncte)**

Fie  $a, b, c > 0$  care verifică relația  $3a + 2b - c = 2026$  și  $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \leq \frac{2026}{4}$ .

a) Arătați că  $\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq a$ .

b) Aflați numerele  $a, b, c$  cu proprietățile din enunț.

**Soluție:**

a) Folosim inegalitatea mediilor  $M_a \geq M_g \Rightarrow \frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}} = a$  .....10p

b) Din a)  $\Rightarrow \frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq a + b$  ..... 5p

$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq a + b - \frac{a+b}{4} - \frac{b+c}{4} = \frac{3a+2b-c}{4} = \frac{2026}{4}$  ..... 5p

Dar  $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \leq \frac{2026}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} = \frac{2026}{4}$ , În ineg. Mediilor are loc egalitatea dacă

$\frac{a^2}{a+b} = \frac{a+b}{4} \Rightarrow a = b$  și  $\frac{b^2}{b+c} = \frac{b+c}{4} \Rightarrow b = c \Rightarrow a = b = c = \frac{2026}{4} = 506,5$  ..... 5p

### Subiectul 3. (20 puncte)

Scriveți numărul  $n = 100 \cdot 102 \cdot 108 \cdot 110 + 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 + 100$  ca sumă de două numere naturale pătrate perfecte.

#### Soluție:

$$105 = a \dots\dots\dots 3p$$

$$n = (a-5) \cdot (a-3) \cdot (a+3) \cdot (a+5) + (a-4) \cdot (a-2) \cdot (a+2) \cdot (a+4) + 100 = \dots\dots\dots 3p$$

$$= (a^2-9) \cdot (a^2-25) + (a^2-4) \cdot (a^2-16) + 100 = \dots\dots\dots 3p$$

$$= (a^4 - 34a^2 + 225) + (a^4 - 20a^2 + 64) + 100 = \dots\dots\dots 3p$$

$$= (a^4 - 34a^2 + 289) + (a^4 - 20a^2 + 100) = \dots\dots\dots 3p$$

$$= (a^2-17)^2 + (a^2-10)^2 = \dots\dots\dots 3p$$

$$= (105^2-17)^2 + (105^2-10)^2 = 11008^2 + 11015^2 \dots\dots\dots 2p$$

### Subiectul 4. (20 puncte)

Se consideră o piramidă patrulateră regulată SABCD cu muchia bazei AB=24 cm și muchia laterală SA=12√3 cm. Fie M mijlocul segmentului BC și T punctul situat pe DC pentru care suma ST+TM este minimă. Aflați lungimea segmentului CT.

#### Soluție: desen correct.....3p

Fie N mijlocul laturii CD, atunci  $SN = 12\sqrt{2} \text{ cm}$  .....7p

Pentru a găsi drumul minim între un punct aflat pe o față SDC și un punct aflat în planul bazei ABCD trecând prin muchia comună DC trebuie să desfășurăm fața laterală SDC în același plan cu baza ABCD. Punctele S, T și M vor fi coliniare în desfășurare pentru ca suma ST + TM să fie minimă.  $\{T\} = SM \cap DC$ . ..... 5p

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle SNT \equiv \sphericalangle MCT = 90^\circ \\ \sphericalangle STN \equiv \sphericalangle MTC (\text{op. la } v) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta SNT \sim \Delta MCT \Rightarrow \frac{CT}{NT} = \frac{MC}{SN} \Rightarrow CT = 12(\sqrt{2}-1) \text{ cm.} \dots\dots\dots 5p$$